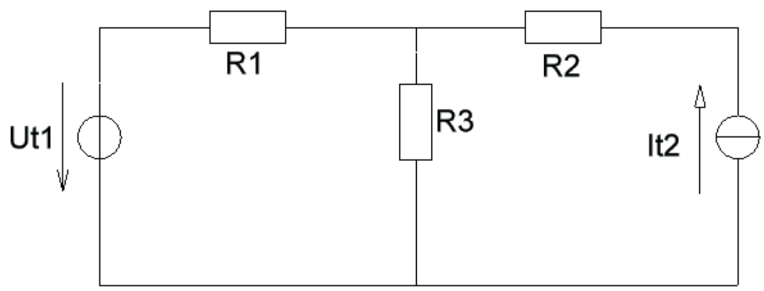
Elektrotechnika - Egyenáramú hálózatok

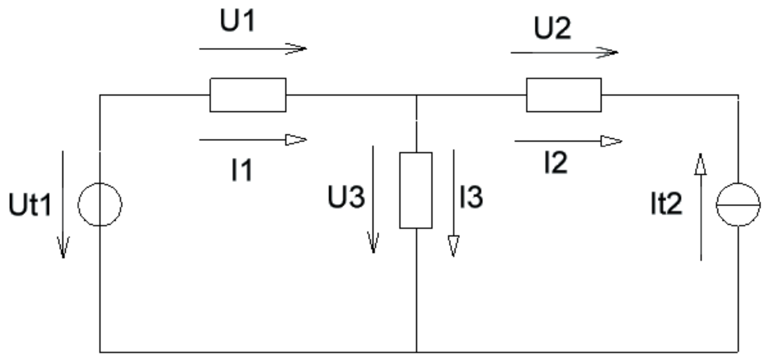
Példák II.

1. példa



Számolja ki az ellenállások feszültségeit és áramait!
U_{t1}=10V; I_{t2}=2mA; R_1=5kΩ; R_2=8kΩ; R_3=10kΩ

1.a. Vegyünk fel tetszés szerinti referencia-irányokat (betartva azt a megegyezést, hogy az ellenállások feszültsége és árama megegyező irányú.)



Írjuk fel a Kirchoff-törvényeket!
A csomóponti törvények a hármas csomópontra és az áramgenerátorosra:

$$I_2 = -I_{t2}$$

$$I_1 = I_2 + I_3$$

A huroktörvényt két hurokra lehet felírni (a harmadik már nem független). Az egyik hurokban áramforrás van, aminek ismeretlen a feszültsége (az ábrán nem jelöltük, lehetne U_{t2}), az plusz egy ismeretlent hozna be (de így plusz egy egyenlet van, tehát megoldható). De Ut2 nem volt kérdés, és az a hurok nem szükséges a példa többi részének megoldásához (U2 meghatározható anélkül, mert I2 ismert), így kihagyjuk. (Ráadásul, a példa megoldása után a kapott eredmények alapján a generátorok hiányzó mennyisége könnyen meghatározható.)

$$U_{t1} = U_1 + U_3$$

Vegyük hozzá az ellenállások karakterisztikáit (Ohm-törvény).

$$U_1 = I_1 R_1$$
$$U_2 = I_2 R_2$$
$$U_3 = I_3 R_3$$

Így megvan a hat ismeretlenhez a hat egyenlet.

Oldjuk meg az egyenleteket.

Helyettesítsük be az Ohm-törvényeket a hurokegyenletbe:

$$U_{t1} = I_1 R_1 + I_3 R_3$$

A csomóponti egyenleteket összevonjuk: I1=-It2+I3 és behelyettesítjük a hurokegyenletbe.

$$U_{t1} = (-I_{t2} + I_3)R_1 + I_3 R_3 = -I_{t2}R_1 + I_3 R_1 + I_3 R_3 = I_3(R_1 + R_3) - I_{t2}R_1$$

Ebből

$$I_3 = \frac{U_{t1} + I_{t2}R_1}{R_1 + R_3} = \frac{10\text{V} + 2\text{mA} \cdot 5\text{k}\Omega}{5\text{k}\Omega + 10\text{k}\Omega} = \frac{20\text{V}}{15\text{k}\Omega} = 1{,}333\text{mA}$$

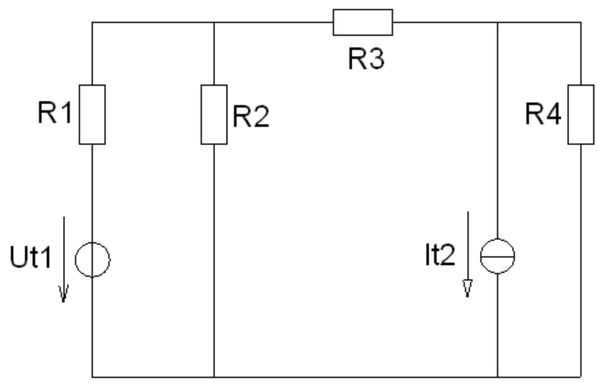
Innen visszahelyettesítve a korábbiakba, az eredmény:

$$I_1 = -I_{t2} + I_3 = -2\text{mA} + 1{,}333\text{mA} = -0{,}667\text{mA}$$
$$I_2 = -I_{t2} = -2\text{mA}$$
$$I_3 = 1{,}333\text{mA}$$
$$U_1 = I_1 R_1 = 5\text{k}\Omega \cdot (-0{,}667\text{mA}) = -3{,}333\text{V}$$
$$U_2 = I_2 R_2 = -2\text{mA} \cdot 8\text{k}\Omega = -16\text{V}$$
$$U_3 = I_3 R_3 = 1{,}333\text{mA} \cdot 10\text{k}\Omega = 13{,}333\text{V}$$

(Mielőtt valaki beszólna, hogy 0,667*5 az nem 3,333 : számolja végig nagyobb pontossággal, vagy ha úgy tetszik, hagyományos törtekkel.)

2. példa

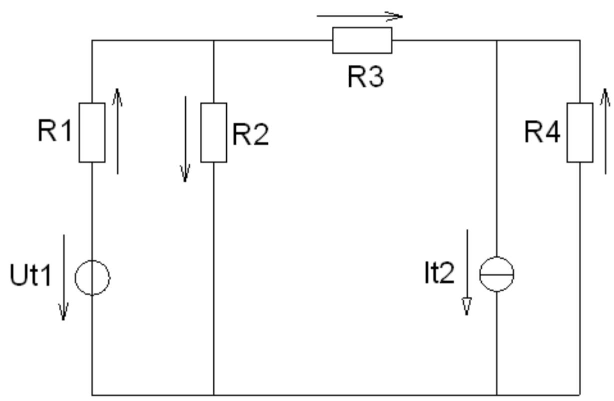
Számolja ki a kapcsolás ellenállásainak feszültségeit és áramait (tetszés szerinti módszerrel)!



Ut1=8V ; It2=2mA ; R1=2k ; R2=4k ; R3=1k ; R4=3k

Megoldás a Kirchhoff egyenletek felírásával:

Vegyünk fel referencia-irányokat:



(Az áramok és feszültségek az ellenállásokon azonos irányba mutatnak, így csak az egyiket jelöltem be. A jelöléseknél az ellenállásokkal azonos indexeket használtam. A "t" az indexben a táp szóra utal (avagy generátor, forrás)).

Csomóponti egyenletek:
Két csomópontra érdemes (pl. felső kettőre). (Az alsó csomóponté nem nyújtana új információt.)

$$I_1 = I_2 + I_3$$
$$I_{t2} = I_3 + I_4$$

Hurokegyenletek:
Az áramforrás feszültségére nem vagyunk kíváncsiak, így azt kihagyjuk a hurkok közül. A maradék hurkokból vegyünk fel kettőt.

$$U_{t1} = U_1 + U_2$$
$$U_{t1} = U_1 + U_3 - U_4$$

Van négy egyenletünk, plusz négy Ohm-törvény, a probléma tehát megoldható.

Helyettesítsük az U=IR-eket az egyenletekbe (lehetne fordítva is, most ez tetszik, mert így nem kell osztani, csak szorozni).

A hurokegyenletek így:

$$U_{t1} = I_1R_1 + I_2R_2$$
$$U_{t1} = I_1R_1 + I_3R_3 - I_4R_4$$

Az egyenletrendszer tehát:

$$(1)\quad I_1 = I_2 + I_3$$
$$(2)\quad I_{t2} = I_3 + I_4$$
$$(3)\quad U_{t1} = I_1R_1 + I_2R_2$$
$$(4)\quad U_{t1} = I_1R_1 + I_3R_3 - I_4R_4$$

(2)-ből fejezzük ki I4-et és helyettesítsük be (4)-be:

$$I_4 = I_{t2} - I_3$$
$$U_{t1} = I_1R_1 + I_3R_3 - (I_{t2} - I_3)R_4 = I_1R_1 + I_3R_3 - I_{t2}R_4 + I_3R_4 = I_1R_1 + I_3(R_3 + R_4) - I_{t2}R_4$$

Fejezzük ki (1)-ből I2-t és helyettesítsük be (3)-ba:

$$I_2 = I_1 - I_3$$
$$U_{t1} = I_1R_1 + I_1R_2 - I_3R_2 = I_1(R_1 + R_2) - I_3R_2$$

A maradék egyenletek tehát:

$$U_{t1} = I_1R_1 + I_3(R_3 + R_4) - I_{t2}R_4$$
$$U_{t1} = I_1(R_1 + R_2) - I_3R_2$$

Itt az egyik lehetőség, hogy tovább gyűrjük, és a második egyenletből I_3-t kifejezzük és behelyettesítjük:

$$I_3 = \frac{I_1(R_1 + R_2) - U_{t1}}{R_2}$$

$$U_{t1} = I_1R_1 + I_3(R_3 + R_4) - I_{t2}R_4 = I_1R_1 + \frac{I_1(R_1 + R_2) - U_{t1}}{R_2}(R_3 + R_4) - I_{t2}R_4$$

Kifejezve I1-et:

$$U_{t1} = I_1R_1 + \frac{I_1(R_1 + R_2) - U_{t1}}{R_2}(R_3 + R_4) - I_{t2}R_4 =$$

$$= I_1\left(R_1 + \frac{(R_1 + R_2)(R_3 + R_4)}{R_2}\right) - U_{t1}\frac{R_3 + R_4}{R_2} - I_{t2}R_4$$

$$I_1 = \frac{U_{t1}\left(1 + \frac{R_3 + R_4}{R_2}\right) + I_{t2}R_4}{R_1 + \frac{(R_1 + R_2)(R_3 + R_4)}{R_2}} =$$

$$= \frac{8V\left(1 + \frac{1k\Omega + 3k\Omega}{4k\Omega}\right) + 2mA \cdot 3k\Omega}{2k\Omega + \frac{(2k\Omega + 4k\Omega)(1k\Omega + 3k)}{4k\Omega}} = \frac{22V}{8k\Omega} = 2,75mA$$

Láthatjuk, hogy nem egyszerű a helyzet, a fenti levezést és számolást könnyű elrontani. Ezért is szoktunk ennyi elem esetén már alternatív módszereket választani (pl. szuperpozíció stb)

Jelen esetben még megpróbálhatjuk, hogy visszatérünk a két egyenlethez és behelyettesítjük a számokat (ez az, amit korábbi lépésekben nem szoktam javasolni):

$$8V = I_1 \cdot 6k\Omega - I_3 \cdot 4k\Omega$$
$$8V = I_1 \cdot 2k\Omega + I_3 \cdot 4k\Omega - 2mA \cdot 3k\Omega = I_1 \cdot 2k\Omega + I_3 \cdot 4k\Omega - 6V$$

Adjuk össze a két egyenletet, ekkor I3 kiesik:

$$22V = I_1 \cdot 8k\Omega$$
$$I_1 = \frac{22V}{8k\Omega} = 2,75mA$$

ami megfelel a másik úton kapott eredménynek.

Visszahelyettesítünk:

$$I_3 = \frac{I_1 \cdot 6k\Omega - 8V}{4k\Omega} = 2,125mA$$
$$I_2 = I_1 - I_3 = 2,75mA - 2,125mA = 0,625mA$$
$$I_4 = I_{t2} - I_3 = 2mA - 2,125mA = -0,125mA$$

A végeredmény:

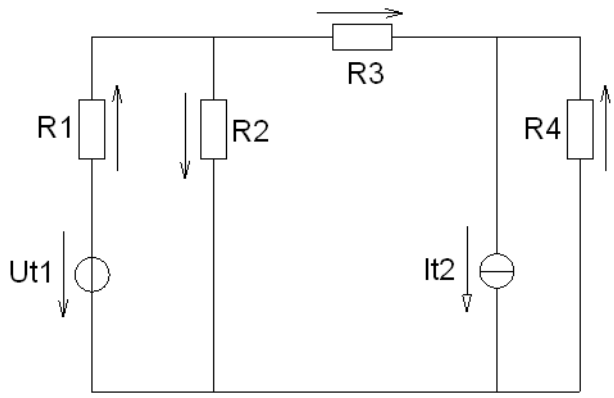
$$I_1 = 2,75mA$$
$$I_2 = 0,625mA$$
$$I_3 = 2,125mA$$
$$I_4 = -0,125mA$$
$$U_1 = I_1R_1 = 5,5V$$
$$U_2 = I_2R_2 = 2,5V$$
$$U_3 = I_3R_3 = 2,125V$$
$$U_4 = I_4R_4 = -0,375V$$

Ellenőrizzük vissza a végeredményt. A nyilak mellé odaírva a számokat, ránézésre ellenőrizzük, hogy a csomóponti és huroktörvények teljesülnek-e, avagy az első egyenletekbe behelyettesítünk.
2,75mA=0,625mA+2,125mA
2,125mA - 0,125mA = 2mA
8V = 5,5V + 2,5 V
8V = 5,5V + 2,125V + 0,375V

(Megj: a visszahelyettesítés persze csak akkor igazi, ha az eredeti egyenleteink helyesek...)

Most ugyanezt vizsgáljuk meg a szuperpozíció módszerével is!

Könnyebbség kedvéért az adatok újra:
Ut1=8V ; It2=2mA ; R1=2k ; R2=4k ; R3=1k ; R4=3k



Először dezaktíváljuk It2-t, amiből szakadás lesz.

$$U_1' = U_{t1}\frac{R_1}{R_1 + R_2 \,||\, (R_3 + R_4)} = 8V\frac{2k\Omega}{2k\Omega + \left((4k\Omega)^{-1} + (1k\Omega + 3k\Omega)^{-1}\right)^{-1}} = 4V$$

$$U_2' = U_{t1} - U_1' = 4V$$

$$U_3' = U_2'\frac{R_3}{R_3 + R_4} = 1V$$

$$U_4' = -(U_2' - U_3') = -3V$$

Másodszor dezaktíváljuk Ut1-et, amiből rövidzár lesz.

$$U_4'' = I_{t2}\left(R_4 \,||\, (R_3 + R_1 \,||\, R_2)\right) = 2mA\left((3k\Omega)^{-1} + \left(1k\Omega + \left((2k\Omega)^{-1} + (4k\Omega)^{-1}\right)^{-1}\right)^{-1}\right)^{-1} =$$

$$= 2mA \cdot 1,3125k\Omega = 2,625V$$

$$U_3'' = U_4''\frac{R_3}{R_3 + R_1 \,||\, R_2} = 2,625V\frac{1k\Omega}{1k\Omega + \left((2k\Omega)^{-1} + (4k\Omega)^{-1}\right)^{-1}} = 1,125V$$

$$U_1'' = U_4'' - U_3'' = 2,625V - 1,125V = 1,5V$$

$$U_2'' = -U_1'' = -1,5V$$

Végül összegezzük a részeredményeket:

$$U_1 = U_1^{'} + U_1^{"} = 4V + 1,5V = 5,5V$$

$$U_2 = U_2^{'} + U_2^{"} = 4V - 1,5V = 2,5V$$

$$U_3 = U_3^{'} + U_3^{"} = 1V + 1,125V = 2,125V$$

$$U_4 = U_4^{'} + U_4^{"} = -3V + 2,625 = -0,375V$$

$$I_1 = \frac{U_1}{R_1} = 2,75mA$$

$$I_2 = \frac{U_2}{R_2} = 0,625mA$$

$$I_3 = \frac{U_3}{R_3} = 2,125mA$$

$$I_4 = \frac{U_4}{R_4} = -0,125mA$$

Láthatjuk, hogy ugyanazt kaptuk, mint az előző megoldásban (csak kicsit kevésbé randa egyenletrendezéssel).