A KÖZÉPISKOLÁBÓL ISMERT
ELEMI ALAPFÜGGVÉNYEK ÖSSZEFOGLALÁSA

I. HATVÁNYFÜGGVÉNYEK

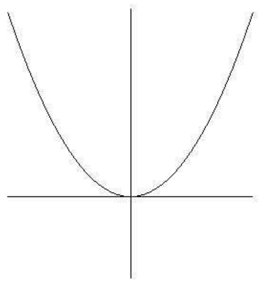
$f(x) = x^{\alpha}$, $\alpha \in \mathbf{R}$ rögzített

1. α pozitív páros egész (pl. $f(x) = x^2, x^4 \ldots$) **(1. ábra)**

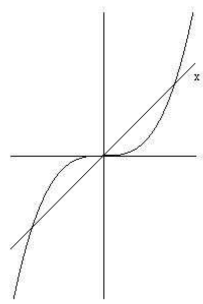
Jellemzés: $D = \mathbf{R}$, $R = \mathbf{R}^+ \cup \{0\} = [0;+\infty[$. Alulról korlátos.
A $]-\infty;0]$-ban szigorúan monoton csökken, a $[0;+\infty[$-ben szigorúan monoton nő. Konvex.
Az $x = 0$ hely lokális és globális minimumhely illetve zérushely, értéke $f(x) = 0$.
$\lim\limits_{\pm\infty} f(x) = +\infty$.

2. α pozitív páratlan egész (pl. $f(x) = x, x^3, x^5 \ldots$) **(2. ábra)**

Jellemzés: $D = R = \mathbf{R}$.
Szigorúan monoton nő. A $]-\infty;0]$-ban konkáv, a $[0;+\infty[$-ben konvex. Az $x = 0$ hely inflexiós hely és zérushely, értéke $f(x) = 0$.
(α=1 esetén konvex és konkáv, ill. minden hely inflexiós hely).
$\lim\limits_{-\infty} f(x) = -\infty$ $\lim\limits_{+\infty} f(x) = +\infty$.



1. ábra



2. ábra

3. α negatív páros egész (pl. $f(x) = \frac{1}{x^2}, \frac{1}{x^4}, \ldots$) **(3. ábra)**

Jellemzés: $D = \mathbf{R} - \{0\} =]-\infty;0[\cup]0;+\infty[$, $R = \mathbf{R}^+ =]0;+\infty[$. Alulról korlátos.
A $]-\infty;0[$-ban szigorúan monoton nő, a $]0;+\infty[$-ben szigorúan monoton csökken.
A $]-\infty;0[$-ban és a $]0;+\infty[$-ben konvex. Nem metszi a tengelyeket.
$\lim\limits_{\pm\infty} f(x) = 0^+$, $\lim\limits_{0^+} f(x) = \lim\limits_{0^-} f(x) = +\infty$.

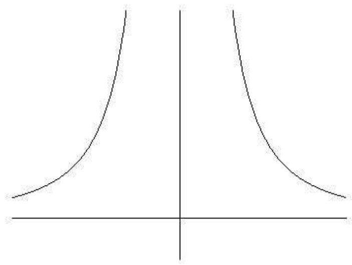
4. α negatív páratlan egész (pl. $f(x)=\frac{1}{x},\frac{1}{x^3},\dots$) **(4. ábra)**

Jellemzés: $D=R=\mathbf{R}-\{0\}=\left]-\infty;0\right[\cup\left]0;+\infty\right[$.

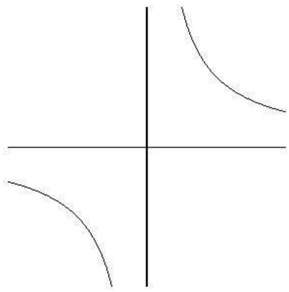
A $\left]-\infty;0\right[$-ban és a $\left]0;+\infty\right[$-ben szigorúan monoton csökken.

A $\left]-\infty;0\right[$-ban konkáv, a $\left]0;+\infty\right[$-ben konvex. Nem metszi a tengelyeket.

$\lim\limits_{-\infty} f(x)=0^-$, $\lim\limits_{+\infty} f(x)=0^+$, $\lim\limits_{0^-} f(x)=-\infty$, $\lim\limits_{0^+} f(x)=+\infty$.



3. ábra



4. ábra

5. α=0 ($f(x)=1$) **(5. ábra)**

Jellemzés: $D=\mathbf{R}$, $R=\{1\}$. Korlátos.

Monoton nő és monoton csökken (konstans függvény). Konvex és konkáv.

Minden hely lokális és globális szélsőérték- ill. inflexiós hely, értéke $f(x)=1$.

Nincs zérushelye. Az y-tengelyt a $(0;1)$ pontban metszi.

$\lim\limits_{\pm\infty} f(x)=1$.

6. α nem egész

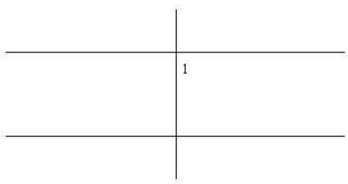
Az $f(x)$ függvény értelmezési tartománya, ábrája és jellemzése ilyenkor α-tól függően más és más. Példaként legyen $f(x)=x^{\frac{1}{2}}=\sqrt{x}$. **(6. ábra)**

Jellemzés: $D=R=\left[0;+\infty\right[$. Alulról korlátos.

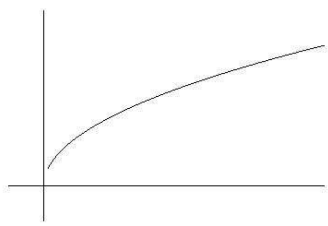
Szigorúan monoton nő. Konkáv.

Az $x=0$ hely globális minimumhely és zérushely, értéke $f(x)=0$.

$\lim\limits_{+\infty} f(x)=+\infty$.



5. ábra



6. ábra

II. EXPONENCIÁLIS FÜGGVÉNYEK

$f(x) = a^x, \quad a \in \mathbf{R}$ rögzített, $a > 0,\ a \neq 1$

1. a > 1 (pl. $f(x) = 2^x, e^x \ldots$) **(7. ábra)**

Jellemzés: $D = \mathbf{R},\ R = \mathbf{R}^+ =]0; +\infty[$. Alulról korlátos.

Szigorúan monoton nő. Konvex. Nincs zérushelye. Az y-tengelyt a $(0;1)$ pontban metszi.

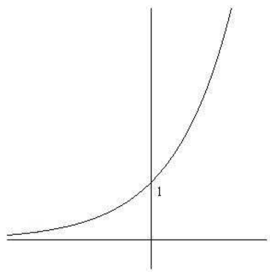
$\lim\limits_{-\infty} f(x) = 0^+,\ \lim\limits_{+\infty} f(x) = +\infty$.

2. 0 < a < 1 (pl. $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x = 2^{-x},\ \left(\frac{1}{e}\right)^x = e^{-x} \ldots$) **(8. ábra)**

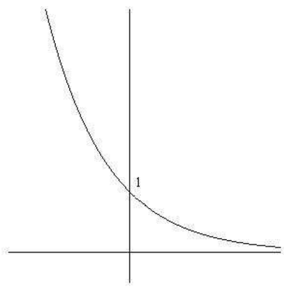
Jellemzés: $D = \mathbf{R},\ R = \mathbf{R}^+ =]0; +\infty[$. Alulról korlátos.

Szigorúan monoton csökken. Konvex. Nincs zérushelye. Az y-tengelyt a $(0;1)$ pontban metszi.

$\lim\limits_{-\infty} f(x) = +\infty,\ \lim\limits_{+\infty} f(x) = 0^+$.



7. ábra



8.ábra

III. LOGARITMUS FÜGGVÉNYEK

$f(x) = \log_a x, \quad a \in \mathbf{R}$ rögzített, $a > 0,\ a \neq 1$

1. a > 1 (pl. $f(x) = \log_2 x,\ \log_e x = \ln x,\ \log_{10} x = \lg x \ldots$) **(9. ábra)**

Jellemzés: $D = \mathbf{R}^+ = \left]0; +\infty\right[,\ R = \mathbf{R}$.

Szigorúan monoton nő. Konkáv. Az $x = 1$ hely zérushely.

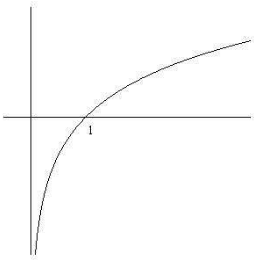
$\lim\limits_{0^+} f(x) = -\infty,\ \lim\limits_{+\infty} f(x) = +\infty$.

2. 0 < a < 1 (pl. $f(x) = \log_{\frac{1}{2}} x,\ \log_{\frac{1}{e}} x \ldots$) **(10. ábra)**

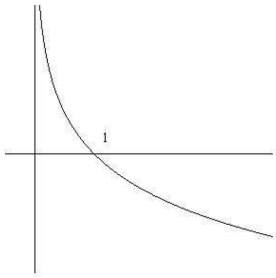
Jellemzés: $D = \mathbf{R}^+ = \left]0; +\infty\right[,\ R = \mathbf{R}$.

Szigorúan monoton csökken. Konvex. Az $x = 1$ hely zérushely.

$\lim\limits_{0^+} f(x) = +\infty,\ \lim\limits_{+\infty} f(x) = -\infty$.



9. ábra



10. ábra

IV. TRIGONOMETRIKUS FÜGGVÉNYEK

1. $f(x) = \sin x$ **(11. ábra)**

Jellemzés: $D = \mathbf{R}$, $R = [-1;1]$.

Periodikus, periódusa 2π. Jellemzése a $[0;2\pi[$ periódusban:

A $\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$-ben szigorúan monoton nő, a $\left[\frac{\pi}{2};\frac{3\pi}{2}\right]$-ben szigorúan monoton csökken, a $\left[\frac{3\pi}{2};2\pi\right[$ -ben szigorúan monoton nő.

A $[0;\pi]$-ben konkáv, a $[\pi;2\pi[$ -ben konvex.

Az $x = \frac{\pi}{2}$ hely lokális és globális maximumhely, értéke $f(x) = 1$; az $x = \frac{3\pi}{2}$ hely lokális és globális minimumhely, értéke $f(x) = -1$.

Az $x = 0$ és $x = \pi$ helyek zérushelyek.

$\lim\limits_{\pm\infty} f(x)$ nem léteznek.

2. $f(x) = \cos x$ **(12. ábra)**

Jellemzés: $D = \mathbf{R}$, $R = [-1;1]$.

Periodikus, periódusa 2π. Jellemzése a $[0;2\pi[$ periódusban:

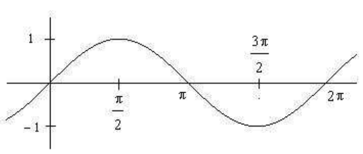
A $[0;\pi]$-ben szigorúan monoton csökken, a $[\pi;2\pi[$ -ben szigorúan nő.

A $\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$-ben konkáv, a $\left[\frac{\pi}{2};\frac{3\pi}{2}\right]$-ben konvex, a $\left[\frac{3\pi}{2};2\pi\right[$ -ben konkáv.

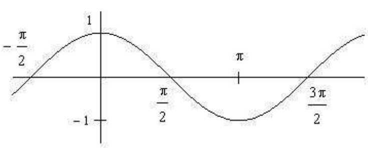
Az $x = 0$ hely lokális és globális maximumhely, értéke $f(x) = 1$; az $x = \pi$ hely lokális és globális minimumhely, értéke $f(x) = -1$.

Az $x = \frac{\pi}{2}$ és $x = \frac{3\pi}{2}$ helyek zérushelyek.

$\lim\limits_{\pm\infty} f(x)$ nem léteznek.



11. ábra



12. ábra

3. $f(x) = \mathrm{tg}\, x$ **(13. ábra)**

Jellemzés: $D = \mathbf{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k \cdot \pi \right\}$, ahol $k \in \mathbf{Z}$, $R = \mathbf{R}$.

Periodikus, periódusa π. Jellemzése a $\left] -\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2} \right[$ periódusban:

Szigorúan monoton nő. A $\left] -\frac{\pi}{2}; 0 \right]$-ban konkáv, a $\left[0; \frac{\pi}{2} \right[$-ben konvex.

Az $x = 0$ hely zérushely.

$\lim\limits_{-\frac{\pi}{2}^{+}} f(x) = -\infty$, $\lim\limits_{\frac{\pi}{2}^{-}} f(x) = +\infty$, $\lim\limits_{\pm\infty} f(x)$ nem léteznek.

4. $f(x) = \mathrm{ctg}\, x$ **(14. ábra)**

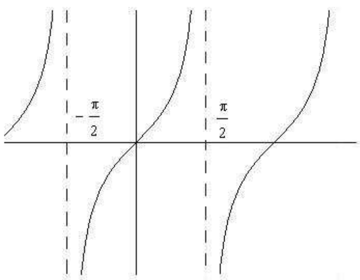
Jellemzés: $D = \mathbf{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k \cdot \pi \right\}$, ahol $k \in \mathbf{Z}$, $R = \mathbf{R}$.

Periodikus, periódusa π. Jellemzése a $\left] 0; \pi \right[$ periódusban:

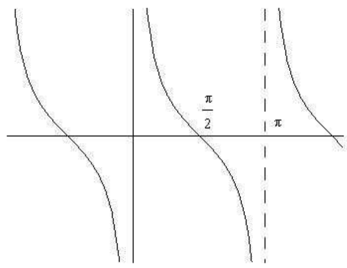
Szigorúan monoton csökken. A $\left] 0; \frac{\pi}{2} \right]$-ban konvex, a $\left[\frac{\pi}{2}; \pi \right[$-ben konkáv.

Az $x = \frac{\pi}{2}$ hely zérushely.

$\lim\limits_{0^{+}} f(x) = +\infty$, $\lim\limits_{\pi^{-}} f(x) = -\infty$, $\lim\limits_{\pm\infty} f(x)$ nem léteznek.



13. ábra



14. ábra